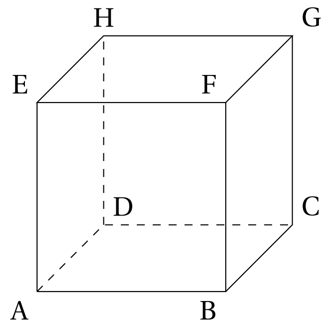
Exercices : Produit Scalaire dans l'Espace - Orthogonalité

Exercice 1. On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.



1. Les droites suivantes sont-elles orthogonales ?

   (a) (EF) et (BG) (b) (HF) et (BG) (c) (ED) et (BG)

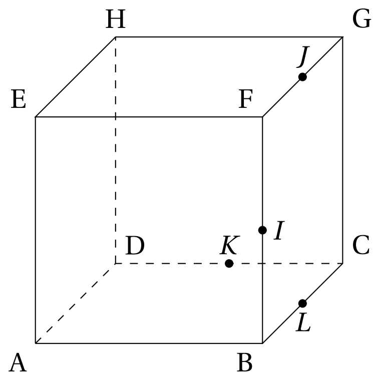
2. Les droites et plans suivants sont-ils orthogonaux ?

   (a) (EG) et (BFH) (b) (EC) et (BFH)

3. Les plans suivants sont-ils orthogonaux ?

   (a) (DFH) et (EGA) (b) (DFH) et (ACF)

Exercice 2. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 suivant, sur lequel les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[BF]$, $[FG]$, $[CD]$ et $[BC]$.



1. Déterminer les produits scalaires suivants :

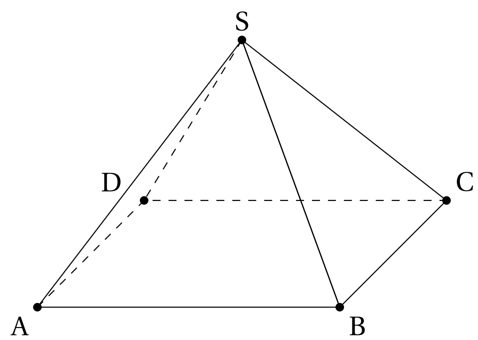
   (a) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AE}$ (c) $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KB}$ (d) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{DG}$ (e) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HD}$

2. Même question :

   (a) $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{DC}$ (c) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$ (d) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EG}$ (e) $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DL}$

Exercice 3. On considère la pyramide à base carrée ABCDS ci-dessous, de sommet S, dont toutes les arêtes ont pour mesure a. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$
2. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$
3. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}$



Orthogonalité

Dans les exercices suivants, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$.

Exercice 4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux?

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$

Exercice 5. Dans chaque cas, déterminer deux réels x et y pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\x\\7\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\x\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}y\\-2\\4\end{pmatrix}$

Exercice 6. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soient (d_1) et (d_2) les droites suivantes : $d_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ $\quad d_2 : \begin{cases} x = -2+s \\ y = 3+s \\ z = 4 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles orthogonales? Si oui, sont-elles perpendiculaires?

Exercice 8. Soit (d) la droite passant par $A(2;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;1;1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de (d).
2. Montrer que le point $B(3;2;4)$ n'appartient pas à (d).
3. Soit $H(1;-1;0)$. Démontrer que $\overrightarrow{BH}\cdot\vec{u} = 0$. Que peut-on en déduire sur le point H?
4. En déduire la distance du point B à la droite (d).

Exercice 9. On considère les points $A(1;-2;3)$, $B(0;1;3)$, $C(3;0;-1)$ et $D(4;-1;5)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC).
3. Vérifier que (AD) est orthogonale au plan (ABC).
4. En déduire la distance du point D au plan (ABC).

Équations de plans

Exercice 10. Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ dans les cas suivants :

1. A(2 ;-3 ;1) et $\overrightarrow{n}(1;3;-4)$
2. A(2 ;0 ;-5) et $\overrightarrow{n}(1;-1;3)$
3. A(1 ;1 ;1) et $\overrightarrow{n}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$

Exercice 11. Équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A, et perpendiculaire à (AB), avec A(2 ;0 ;-1) et B(0 ;1 ;3).

Exercice 12. On considère les points A(1 ;2 ;3), B(0 ;1 ;5) et C(-3 ;0 ;1).

1. Justifier que A, B et C forment un plan de l'espace.
2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 13. Donner un vecteur normal et un point de chacun des plans suivants :

$$\mathscr{P}_1 : 2x-6y+2z-7=0 \qquad \mathscr{P}_2 : z-x=0 \qquad \mathscr{P}_3 : x+2y=5-3z$$

Exercice 14. Soient $\mathscr{P} : 2x+z-1=0$ et $\mathscr{Q} : x+y-2z+3=0$. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont-ils parallèles ? orthogonaux ?

Exercice 15. Soit $\mathscr{P} : 2x+3y+z-6=0$.

1. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec les axes du repère.
2. Représenter le plan $\mathscr{P}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}\ ; \overrightarrow{j}\ ; \overrightarrow{k})$.

Exercice 16. Soient (d) et $\mathscr{P}$ la droite et le plan définis par :

$$(d) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-3t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{P} : 2x+y+z+1=0$$

Étudier la position relative de (d) et $\mathscr{P}$.

Exercice 17. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x-y+z+1=0$.

1. Soit $A(1;1;1)$. Vérifier que $A \notin \mathscr{P}$.
2. Soit $H(x;y;z)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
   (a) Donner un vecteur directeur de la droite (AH).
   (b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (AH).
   (c) Déterminer l'intersection de (AH) et de $\mathscr{P}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point H ?

Exercice 18. On considère les plans :

$$\mathscr{P}_1 : 2x+y+2z+1=0 \qquad \mathscr{P}_2 : x-2y+6z=0$$

1. Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (d).