TRAVAIL EN GROUPE : ORTHOGONALITÉ

Sujet A *: Constructions, équations*

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant pat I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

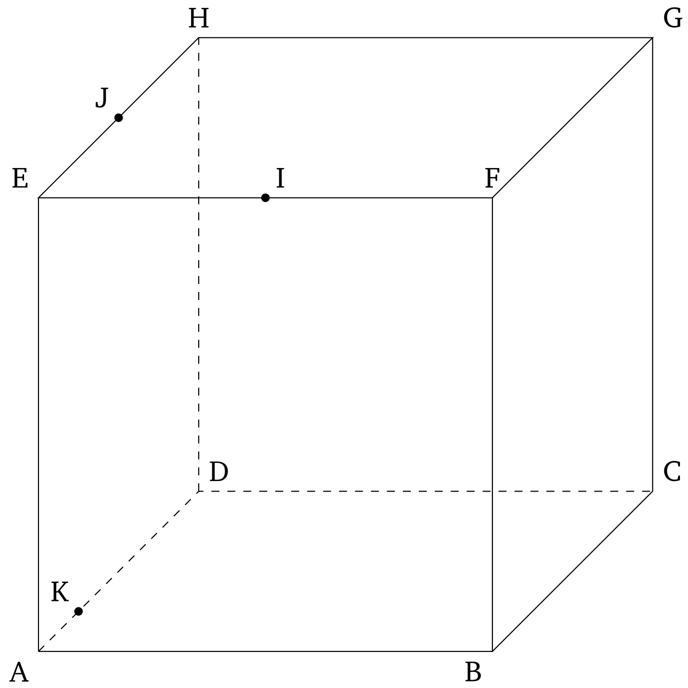
1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.
2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x + 4y - 3z - 1 = 0$.
   (c) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.
   (d) Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).
2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (b) Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   (c) Tracer la droite Δ sur la figure donnée en annexe.
   (d) Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

Annexe à compléter (Sujet A)



TRAVAIL EN GROUPE : ORTHOGONALITÉ

***Sujet B** : Vrai ou Faux*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. ***Chaque réponse doit être justifiée.***
Une réponse non justifiée ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.
Les quatre questions sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace.

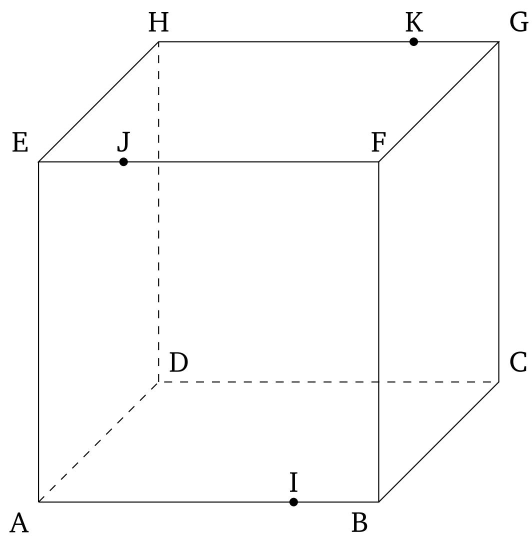
1. On considère le plan P d' équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

   Affirmation : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353 ; 91 ; 98)$.

2. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

   $$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}, \quad \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}.$$

   Affirmation : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.



3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2 \\ z = -6+5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $A(-2 ; 1 ; 0)$. Soit M un point de la droite d.

   Affirmation : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

   Affirmation : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $D(-1 ; 0 ; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(3 ; 6 ; 5)$.

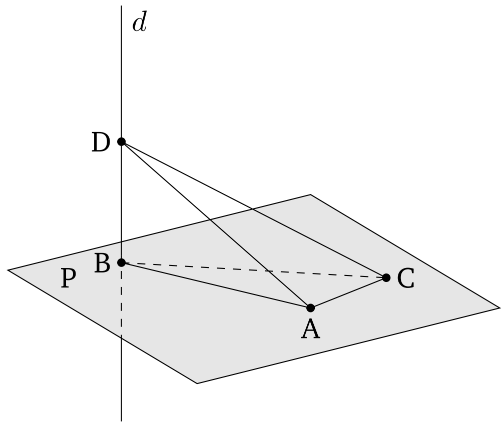
TRAVAIL EN GROUPE : ORTHOGONALITÉ

***Sujet C** : Bicoin*

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.
3. (a) Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.
   (b) On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A$(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$ et la droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2t+1 \\ y & = & -2t+9 \\ z & = & t-3 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B$(5\ ;\ 5\ ;\ -1)$,

3. Justifier que le point C$(7\ ;\ 3\ ;\ -9)$ appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

   (a) Justifier que le triangle ABM est rectangle.

   (b) Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation :

$$t^2 - 4t = 0$$

   (c) En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9 ; 1 ; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.