Travail en Groupe : Orthogonalité

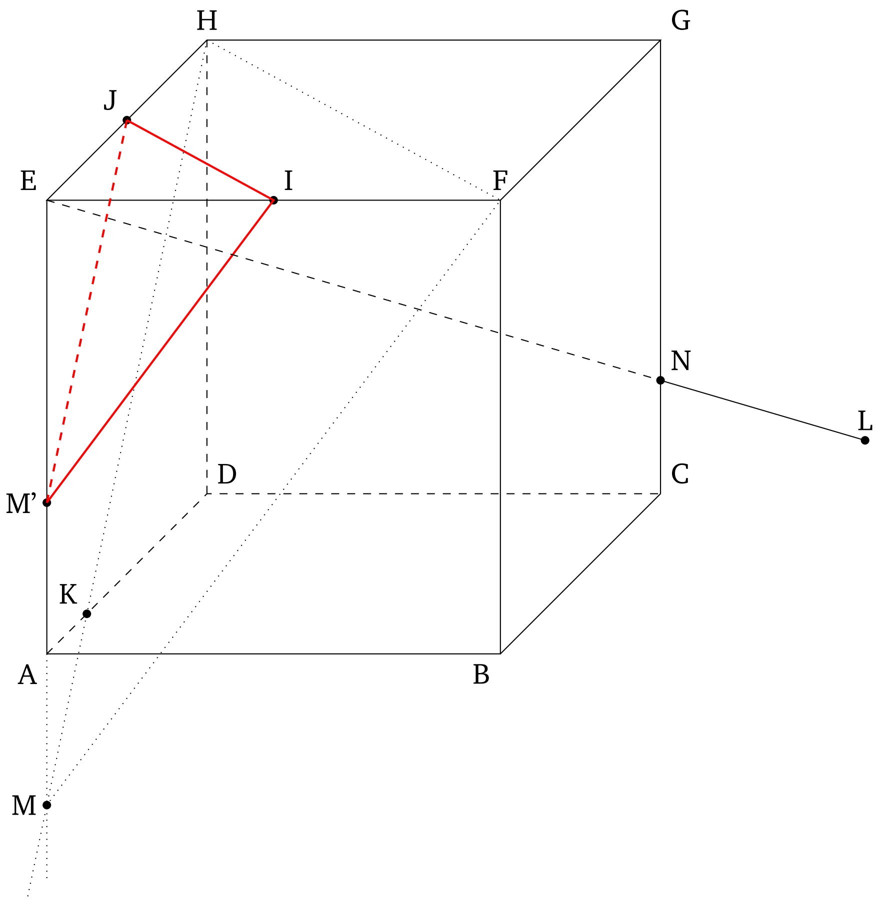
Correction

Sujet A

Partie A

1. M est à l'intersection des droites (AE) et (HK) car ces deux droites non parallèles appartiennent au plan (ADH).

2. - I et J sont les milieux des segments [EF] et [EH] donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles, donc $\boxed{(IJ) \subset \mathscr{P}}$.
   - La parallèle à (HK) passant par J est incluse dans le plan $\mathscr{P}$: elle coupe (AE) en M'.
   - Les droites (IL) et (JL) sont dans le plan $\mathscr{P}$: ce sont les intersections du plan $\mathscr{P}$ avec les faces ADHE et ABFE.
   - $\boxed{\text{La section du cube avec le plan } \mathscr{P} \text{ est le triangle IJM'.}}$



Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

On a donc les coordonnées suivantes : A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

On calcule aisément I $\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$; J $\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$ et K $\begin{pmatrix}0\\1/4\\0\end{pmatrix}$

On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. (a) Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$.

   - $\overrightarrow{\mathrm{FH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FH}} = 4\times(-1)+4\times 1+(-3)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{FH}}\cdot\overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{FH}}$.
   - $\overrightarrow{\mathrm{FK}}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FH}} = 4\times(-1)+4\times\frac{1}{4}+(-3)\times(-1) = 0$, donc $\overrightarrow{\mathrm{FK}}\cdot\overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{FK}}$.

   $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK) donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à ce plan.

   (b) Une équation cartésienne de ce plan est donc :

   $4\,(x-x_{\mathrm{H}})+4\,(y-y_{\mathrm{H}})+(-3)\,(z-z_{\mathrm{H}}) = 0 \iff 4\,(x-0)+4\,(y-1)+(-3)\,(z-1) = 0 \iff 4x+4(y-1)-3(z-1) = 0 \iff \boxed{4x+4y-3z-1=0}$.

   (c) $\mathscr{P}$ et (FHK) sont parallèles donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal commun.

   Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est :

   $4\,(x-x_{\mathrm{I}})+4\,(y-y_{\mathrm{I}})+(-3)\,(z-z_{\mathrm{I}}) = 0 \iff 4\left(x-\frac{1}{2}\right)+4\,(y)+(-3)\,(z-1) = 0 \iff$

   $\boxed{4x+4y-3z+1=0}$

   (d) Calculons les coordonnées du point M′, point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).

   Une représentation paramétrique de (AE) est $\begin{cases} x = 0\\ y = 0\\ z = t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

   On injecte les coordonnées de x, y et z dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$:

   $4\times 0+4\times 0-3t+1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}$.

   Les coordonnées de M′ sont donc $\boxed{\mathrm{M}'\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{3}\right)}$

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

(a) $\overrightarrow{n}$, vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est donc un vecteur directeur de Δ.

Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\Delta \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

(b) Une équation du plan (ABC) est $z = 0$.

En remplaçant les expressions de x, y et z en fonction de t' dans cette équation, on trouve $1-3t' = 0 \iff t' = \dfrac{1}{3}$.

Les coordonnées de L sont donc $\boxed{\mathrm{L}\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ 0\right)}$.

(c) On trace la droite Δ sur la figure donnée en annexe.

(d)
- Le point L de Δ n'appartient pas au plan (ABF) mais E appartient à ce plan ; les droites Δ et (BF) ne sont donc pas sécantes.
- $\Delta \begin{cases} x &= & 4t' \\ y &= & 4t' \\ z &= & 1-3t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$ et (CG) $\begin{cases} x &= & 1 \\ y &= & 1 \\ z &= & t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

  Pour $t' = \dfrac{1}{4}$ et $t = \dfrac{1}{4}$, on obtient le point de coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ qui est un point de la droite (CG), donc Δ et (CG) sont **sécantes** en ce point.

Sujet B

1. On résout le système :

$$\begin{cases} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ 3x+2y+9z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ 3(4t+3)+2(-t+2)+9(-t+9)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ 12t+9-2t+4-9t+81-5=0 \end{cases}$$

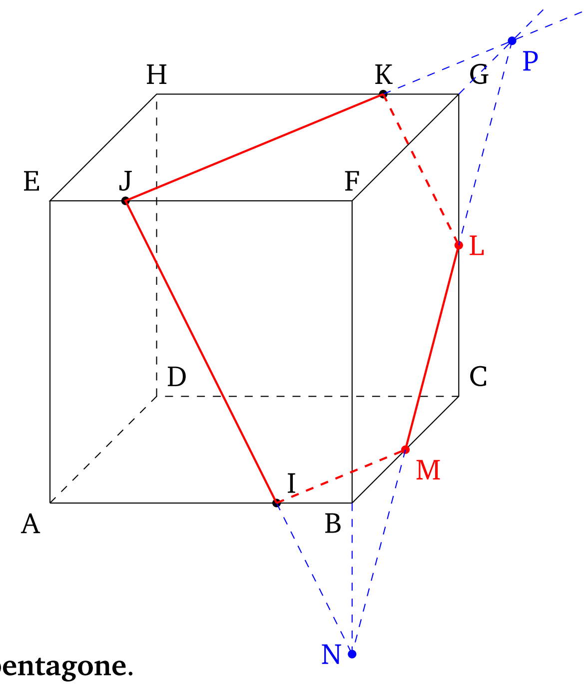
$$\iff \begin{cases} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ t = -89 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -353 \\ y = 91 \\ z = 98 \\ t = -89 \end{cases}$$

L'intersection de P et d est bien le point $(-353\ ;\ 91\ ;\ 98)$. **VRAI**

☞ *On aurait pu simplement vérifier que le point donné appartient bien au plan et à la droite, mais ce n'est pas forcément plus court.*

2. On fait la construction :



La section du cube est un **pentagone**. **FAUX**

3. Soit M$(x;y;z)$ un point de d. Il existe un réel t tel que M$(2+t;2;-6+5t)$.

   On cherche alors t afin de minimiser la distance AM, ou encore la distance AM^2.

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 4+t \\ 1 \\ -6+5t \end{pmatrix}$$

$$AM^2 = (4+t)^2 + 1^2 + (-6+5t)^2 \implies AM^2 = 26t^2 - 52t + 53$$

   La fonction polynomiale $t \mapsto 26t^2 - 52t + 53$ admet un minimum (le coeffient de t^2 est strictement positif) en $t = -\dfrac{b}{2a} = 1$.

   Ainsi, la distance AM est minimale pour $t = 1$ et vaut $\sqrt{26 \times 1^2 - 52 \times 1 + 53} = \sqrt{27}$. **FAUX**

   ☞ *D'après le cours, le point M cherché est le projeté orthogonal de A sur la droite d. On peut donc chercher les coordonnées de ce point et en déduire la distance AM minimale.*

4. Soit d la droite passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

   On choisit un second point de d, par exemple $E(2;6;5)$ (c'est le point tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{DE}$).

   Ainsi, $d = (DE)$.

   On vérifie simplement que D et E appartiennent à chacun des deux plans, à l'aide de leurs équations cartésiennes.

   Ainsi, $d \subset P$ et $d \subset P'$, donc d est bien l'intersection des deux plans. **VRAI**

Sujet C

Partie A

1. d est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC). Donc (BD) est orthogonale (AC).

   (AC) est perpendiculaire à (AB) car ABC est rectangle en A.

   (AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD), on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2. d est perpendiculaire à P donc ABD et CBD sont rectangle en B.

   ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD) donc à tout droite de ce plan, donc en particulier (AC) est perpendiculaire à (AD) en A. Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC.

   Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, ABCD est bien un bicoin.

3. CD est l'hypoténuse de BCD, donc le côté le plus grand : CD $>$ CB et CD $>$ BD ;
   [CD] est l'hypoténuse de de ACD, donc CD $>$ CA, CD $>$ AD.
   Or [AD] est l'hypoténuse de ABD donc AD $>$ AB et d'après le résultat précédent CD $>$ AD $>$ AB.
   Finalement [CD] est la plus longue arête du bicoin car elle est plus longue que les cinq autres.

   (a) I milieu de l'hypoténuse de BCD rectangle en D est le centre du cercle circonscrit à BCD on a alors IB = IC = ID.
   De même dans ACD rectangle en A, I milieu de l'hypoténuse [CD] est le centre du cercle circonscrit à ACD et on a ID = IC = IA.
   Finalement IA = IB = IC = ID, donc I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

Partie B

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est directeur de d donc normal à P.

   $$\begin{aligned} M(x\,;\,y\,;\,z)\in P \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=0 &\iff \begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z+5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0\\ &\iff 2(x-3)-2(y-1)+z+5=0\end{aligned}$$

   Finalement on a $P\ :\ 2x-2y+z+1=0$

2. Pour déterminer l'intersection de P et de d, on "injecte" les coordonnées x, y et z de la représentation paramétrique de d dans l'équation cartésienne de P :

   $$2(2t+1)-2(-2t+9)+(t-3)+1=0 \iff 9t=-18 \iff t=2$$

En reportant cette valeur dans la représentation paramétrique de d, on obtient les coordonnées du point d'intersection : $\text{B}(5\ ;\ 5\ ;\ -1)$.

3. $2x_{\text{C}} - 2y_{\text{C}} + z_{\text{C}} + 1 = 14 - 6 - 9 + 1 = 0$ donc $C \in P$.

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + 4 \times 2 - 4 \times 4 = 0$ donc ABC est rectangle en A.

   De plus, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$.

   Donc **ABC est rectangle isocèle en A**.

4. (a) M$\in d$ et B $\in d$ donc $d = (\text{MB})$.

   De plus B et A sont deux points distincts de P donc (AB)$\subset P$ et on sait que d est perpendiculaire à P donc orthogonale à toute droite de P. On en déduit que (MB) est perpendiculaire à (AB).

   Finalement on a donc bien ABM rectangle en B

   (b) ABM est isocèle en B si et seulement si BM = AB

   $$\begin{aligned} \text{BM} = \text{AB} &\iff \text{BM}^2 = \text{AB}^2 \\ &\iff (2t-4)^2 + (-2t+4)^2 + (t-2)^2 = 36 \\ &\iff 4t^2 - 16t + 16 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2 - 4t + 4 = 36 \\ &\iff 9t^2 - 36t = 0 \\ &\iff t^2 - 4t = 0 \end{aligned}$$

   (c) $t^2 - 4t = 0 \iff t(t-4) = 0 \iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 4$

   Donc $\text{M}_1(1\ ;\ 9\ ;\ -3)$ et $\text{M}_2(9\ ;\ 1\ ;\ 1)$ sont les points de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

ABCD est un bicoin car ABC est rectangle en B (voir question **3.**) et D est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par B.

D'après la question **3.b.** de la **Partie A**, on sait alors que le milieu I de [CD] est équidistant des quatre sommets du bicoin.

Le centre de la sphère circonscrite à ABCD est donc $\text{I}(8\ ;\ 2\ ;\ -4)$ milieu de [CD].

Le rayon de la sphère est IC$= \sqrt{(x_{\text{C}} - x_{\text{I}})^2 + (y_{\text{C}} - y_{\text{I}})^2 + (z_{\text{C}} - z_{\text{I}})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$