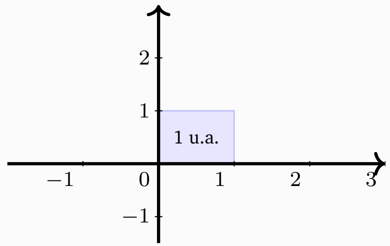
Dans tout ce chapitre, on se place dans un **repère orthonormal**.

I Notion d'Intégrale

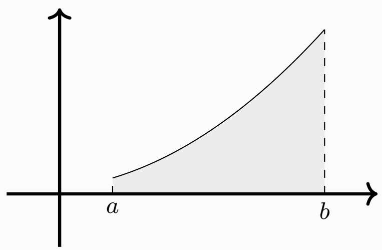
I.1 Aire du domaine associé à une fonction positive

Définition. On appelle **unité d'aire** (u.a.) l'aire du rectangle défini par les unités des axes.



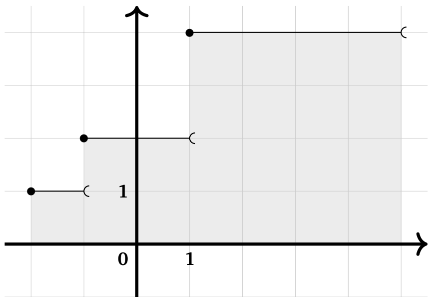
Remarque. Si $OI = 1cm$ et $OJ = 2cm$, alors $1u.a. = 2cm^2$.

Définition. On appelle **domaine associé à une fonction f définie et positive sur** $[a\,;b]$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Remarque. On parle généralement « d'aire sous la courbe ».

Exemple. L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité ci-contre est égale à 21 u.a. (Il suffit de compter les carreaux)



I.2 Intégrale d'une fonction positive

Définition. Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** l'aire du domaine associé à f sur $[a\,;b]$. On la note :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Remarque.

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)$ dx »
- Les réels a et b sont les **bornes de l'intégrale**.
- Le symbole dx a seulement une signification historique. Il sert à déterminer la **variable d'intégration**.
- Dans une intégrale, la variable d'intégration est une variable dite « muette ». On a les égalités suivantes :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$
On peut utiliser n'importe quelle lettre pour la variable d'intégration, à l'exception des variables déjà utilisées, comme a et b ici.

Exemple. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_2^5 2dx \qquad \int_1^4 xdx \qquad \int_{-1}^1 (-2t+3)dt$$

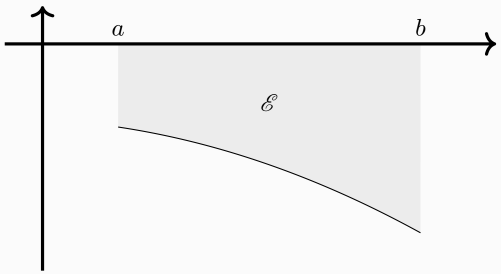
Problème. *Qu'en est-il des fonctions négatives ?*

I.3 Extension aux fonctions de signe quelconque

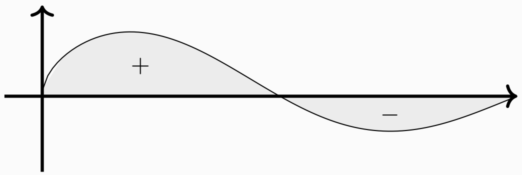
Définition. Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. Soit $\mathscr{E}$ le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

- Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = -\text{aire}(\mathscr{E})$$



- Si f est de signe quelconque sur $[a\,;b]$, on compte alors positivement les aires des domaines où $f(x) \geqslant 0$, et négativement ceux où $f(x) \leqslant 0$.



Exemple. Calculer $\int_0^4 3 - x\,dx$.

Problème. *Comment calculer* $\int_0^1 x^2 dx$ *?*

II Propriétés de l'intégrale

II.1 Propriétés algébriques

D'après les définitions qui précédent, le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ n'a de sens que si $a \leqslant b$.

On définit alors une intégrale de **bornes quelconques** :

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et b.
Si $a \leqslant b$, on pose :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque. On calcule positivement lorsque l'on va « dans le sens positif », c'est à dire communément de la gauche vers la droite. Dans le « sens négatif », on calcule négativement la valeur d'une intégrale.

Théorème. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant trois réels a, b et c. Soit k un nombre réel. On a alors :*

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- ***Relation de Chasles :*** $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- ***Linéarité de l'intégrale :*** $\int_a^b (kf(x) + g(x))\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Remarque. Ce premier théorème est admis.

Théorème. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a\,;b]$, avec $a \leqslant b$.*

- ***Positivité de l'intégrale***

  Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
- ***Croissance de l'intégrale***

  Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$
- ***Inégalité de la moyenne***

  Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

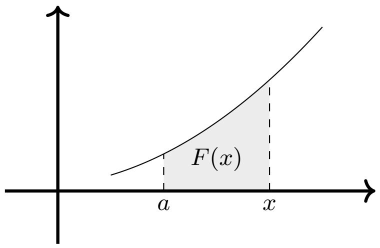
Remarque. Dans la dernière inégalité, les réels m et M sont indépendants de x.

II.2 Intégrale et Primitive

Théorème. *Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Soit $a \in I$.*
La fonction $F : x \longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Démonstration. *Démontrons ce théorème dans le cas où f est croissante. Nous admettrons le cas général.*

La fonction $F : x \longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est bien définie sur I : c'est la fonction qui, à un réel $x \in I$, associe l'aire du domaine associé à f sur l'intervalle $[a\,;x]$ (ou $[x\,;a]$ si $x \leqslant a$).



Soient $x \in I$ et $h > 0$ tel que $x + h \in I$. Le but est de montrer que $F' = f$, en revenant à la définition du nombre dérivé.
D'une part, la relation de Chasles nous donne :

$$F(x+h) - F(h) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt = \int_a^{x+h} f(t)\ dt + \int_x^a f(t)\ dt = \int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

D'autre part, la fonction f étant croissante sur I, elle est donc croissante sur $[x\,;x+h]$, de sorte que :

$$\forall t \in [x\,;x+h]\,,\ \ f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$$

La fonction f est donc bornée sur l'intervalle $[x\,;x+h]$ par $f(x)$ et $f(x+h)$. D'après l'inégalité de la moyenne, on obtient :

$$f(x)(x+h-x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leqslant f(x+h)(x+h-x)$$

Soit :

$$f(x)h \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant f(x+h)h$$

En divisant par $h > 0$:

$$f(x) \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Si $h < 0$, on aurait alors $f(x+h) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$, et de façon analogue, $f(x+h)h \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant f(x)h$. h étant négatif, on obtiendrait alors la même inégalité que précédemment.

C'est à ce moment qu'intervient la continuité de f : f est continue sur I, elle est donc continue en x d'où $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.
Ainsi, par le théorème de l'étau, on a :

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Par définition du nombre dérivé, la fonction F est dérivable en x, et $F'(x) = f(x)$. Ceci étant vrai quelque soit $x \in I$, on vient de démontrer que F est dérivable sur I et que $F' = f$ sur I : F est donc une primitive de f sur I.
Remarquons enfin que $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\ dt = 0$, donc F s'annule bien en a.

□

Remarque. La conséquence immédiate de ce théorème est la suivante :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Ce théorème ne donne cependant pas de méthode pour calculer une primitive d'une fonction. Pour cela, il faudra réfléchir !

Certaines primitives restent cependant difficilement accessibles. C'est le cas par exemple des primitives de $\ln x$, dont nous verrons une expression en exercice. Il existe cependant des fonctions n'admettant pas de primitive « simple » : les primitives de $x \mapsto e^{x^2}$ ne s'expriment tout simplement pas à l'aide de fonctions usuelles.

III Calculs d'intégrales

III.1 Théorème fondamental

Théorème. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. *Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$: G est la primitive de f s'annulant en a. On a notamment $G(a) = 0$ et $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. Soit F une primitive quelconque de f. F et G ne diffèrent que d'une constante : il existe un réel k tel que pour tout $x \in [a;b]$, $F(x) = G(x) + k$.*
Ainsi, $F(b) - F(a) = G(b) + k - (G(a) + k) = G(b) - G(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

□

Exemple. Calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_1^4 2\ dx$
- $\displaystyle\int_1^4 x^2\ dx$
- $\displaystyle\int_2^5 x\ dx$
- $\displaystyle\int_1^2 e^x + 1\ dx$

Définition (Valeur moyenne d'une fonction)**.** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit la **valeur moyenne de f sur** $[a\,;b]$ par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

III.2 Intégration par parties

Propriété. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$. Alors :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. *D'après la relation bien connue de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient sans mal l'égalité $uv' = (uv)' - u'v$ que l'on intègre entre a et b :*

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$

□

Exemple. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi x\cos(x)\ dx \qquad \int_1^e x\ln(x)dx$$

Exemple. Déterminer une primitive de la fonction $\ln$.

III.3 Intégrales et suites

Exemple. On considère la suite (I_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_1^n \frac{dt}{t}$$

1. Calculer I_1, I_2, I_3.
2. Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Étudier les variations de (I_n).
4. Déterminer la limite de (I_n) et interpréter graphiquement.

Exemple. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\ dt$$

1. Calculer I_0.
2. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
3. Étudier le sens de variations de (I_n).
4. Montrer par un encadrement que (I_n) converge vers 0.