

EXERCICES : INTÉGRATION

Exercice 01 Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|--|
| 1. $\int_0^1 x^3 dx$ | 4. $\int_1^2 t^2 - \frac{1}{t} dt$ | 7. $\int_0^1 2e^x - 5x dx$ |
| 2. $\int_1^2 x^2 + 3 dx$ | 5. $\int_0^1 e^t dt$ | 8. $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} dx$ |
| 3. $\int_0^1 4x^2 + 2x - 1 dx$ | 6. $\int_1^e \frac{3}{t} dt$ | 9. $\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x) dx$ |

Exercice 02 Même exercice (reconnaître une forme u'/u) :

- | | | |
|------------------------------------|---|--|
| 1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ | 3. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} dx$ | 5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$ |
| 2. $\int_0^4 \frac{5}{3x + 1} dx$ | 4. $\int_0^1 \frac{1}{3x - 5} dx$ | 6. $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ |

Exercice 03 Même exercice (reconnaître une forme $u' \times u^n$) :

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| 1. $\int_0^1 (x + 1)^2 dx$ | 3. $\int_0^1 \frac{1}{(3x + 1)^4} dx$ | 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^3(x) dx$ |
| 2. $\int_1^3 x^2(x^3 - 2)^4 dx$ | 4. $\int_0^1 \frac{1 - x}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$ | 6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) \cos(t) dt$ |

Exercice 04 Même exercice (reconnaître une forme u'/\sqrt{u}) :

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| 1. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ | 2. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ | 3. $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{5x + 4}} dx$ |
|-------------------------------------|---|--|

Exercice 05 Même exercice (reconnaître une forme $u'e^u$) :

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|--|
| 1. $\int_0^1 2e^{-3x} dx$ | 2. $\int_0^{\ln(2)} te^{t^2} dt$ | 3. $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ |
|---------------------------|----------------------------------|--|

Exercice 06 Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 5}$.

1. Factoriser $x^2 - 4x - 5$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et 5 :

$$\frac{1}{x^2 - 4x - 5} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 5}$$

3. En déduire la valeur de $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 5}$.

Exercice 07 Primitive donnée

On considère la fonction $F : x \rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Justifier que F est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$ pour tout réel x .
2. En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Exercice 08 Primitive de $\frac{1}{\cos x}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$:

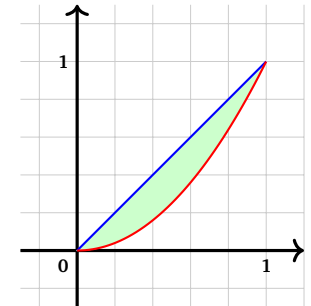
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$

2. En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$$

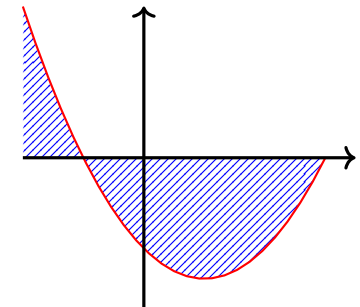
Exercice 09 On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, représentées graphiquement ci-contre.

1. Préciser la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur $[0; 1]$.
2. Déterminer l'aire (en u.a.) du domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



Exercice 10 Dans un repère orthogonal d'unités 1cm sur les abscisses et 0,5cm sur les ordonnées, on considère la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Étudier la position relative de \mathcal{C} par rapport à l'axe des abscisses.
2. En déduire l'aire - en unités d'aire puis en cm^2 - du domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$.



Exercice 11 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une **intégration par parties** :

1. $\int_1^e x \ln(x) dx$
2. $\int_0^\pi (x-1) \sin(x) dx$
3. $\int_0^1 (x+2)e^x dx$
4. $\int_1^2 (t-2)e^{2t} dt$
5. $\int_1^{e^2} \ln(x) dx$
6. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Exercice 12 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une **double intégration par parties** :

1. $\int_0^1 t^2 e^t dt$
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos(t) dt$
3. $\int_0^\pi e^{-t} \sin(t) dt$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

1. $\int_0^1 t^n dt$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^n(t) dt$
3. $\int_1^2 t^n \ln(t) dt$

Exercice 14 Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^n t^2 e^{-t} dt$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 15 Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+t}$.
Calculer I_n en fonction de n , et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Interpréter graphiquement.

Exercice 16 On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 t^n \cos(t) dt$$

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel n , $I_n \geq 0$.
(b) Étudier le sens de variations de (I_n) .
(c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de (I_n) ?
2. (a) Démontrer que pour tout réel $t \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel n , $t^n \cos(t) \leq t^n$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 17 On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 .
(b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

- (c) En déduire les valeurs de I_2 et I_3 .
2. (a) Démontrer que pour tout réel $t \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel n , $\frac{t^n}{e} \leq t^n e^{-t} \leq t^n$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $\frac{e}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 18 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

1. (a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
(b) Calculer u_1 et en déduire u_0 .
2. (a) Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.
(b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
(c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
3. Déduire des questions précédentes que (u_n) converge vers une limite à préciser.

Exercice 19 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx$$

1. Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.
(c) Exprimer $\int_0^n 2xe^{-x} dx$ en fonction de n .
(d) En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n \leq 2$.
3. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?