

Exercices de Cours : Variables aléatoires - Loi des grands nombres

I Variables aléatoires

I.1 Quelques rappels : espérance, variance, écart-type

Exercice 01 On lance un dé cubique bien équilibré, possédant une face numérotée 1, deux faces numérotées 2 et trois faces numérotées 3. On appelle X le numéro de la face obtenue.

1. Donner la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

Valeurs x_i de X			
$p(X = x_i)$			

2. Calculer l'espérance de X .

3. Calculer la variance et l'écart-type de X .

I.2 Opérations sur les variables aléatoires

I.3 Propriétés de l'espérance et de la variance

Exercice 02 On lance successivement deux fois le dé de l'exercice précédent, et on note X_1 et X_2 les nombres obtenus. On admet que X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes.

À l'issue des deux lancers, on calcule un score S , égal à deux fois le numéro obtenu au premier lancer, moins le numéro obtenu au second lancer.

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X_1 et X_2 .

2. Exprimer S en fonction de X_1 et X_2 , puis déterminer son espérance et sa variance.

II Échantillon d'une variable aléatoire

II.1 Échantillon de taille n

II.2 Espérance, variance, écart-type

Exercice 03 On lance 10 fois le dé de l'exercice 01, et on note X le nombre de 2 obtenus à l'issue des 10 lancers. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_{20})$ de taille 20 de X . On note :

$$S_{20} = X_1 + X_2 + \dots + X_{20} \quad M_{20} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{20}}{20}$$

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.

2. Donner l'espérance et la variance de X .

3. Donner l'espérance de S_{20} et M_{20} . Interpréter ces deux résultats dans le contexte de l'exercice.

4. Donner la variance de S_{20} et M_{20} .

III Loi des grands nombres

III.1 Inégalité de Markov

Exercice 04 On lance 12 fois un même dé cubique bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Démontrer sans calculs, à l'aide de l'inégalité de Markov, que la probabilité d'obtenir au moins 10 fois le nombre 6 est inférieure à 20%.

2. Déterminer la valeur de cette probabilité.

III.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 05 Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 100$ et d'écart-type $\sigma(X) = 10$.

1. À l'aide de l'inégalité de Markov, donner une majoration de $p(X \geq 150)$.

2. Justifier que $|X - 100| \geq 50 \implies X \geq 150$; en déduire une majoration de cette même probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que $p(|X - 100| < 20)$ est supérieure ou égale à 75%. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

III.3 Inégalité de concentration

Exercice 06 Soit X une variable qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$.

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X .

Déterminer la valeur de n pour que la probabilité que M_n soit dans l'intervalle $[0,45; 0,55]$ soit supérieure à 0,95.

III.4 Loi faible des grands nombres