

Feuille d'exercices - Concentration, loi des grands nombres

Exercice 1

Dans chaque cas, X est une variable aléatoire dont l'espérance et la variance sont données.

1. $E(X) = 20$ et $V(X) = 3$. Majorer $P(|X - 20| \geq 4)$.
2. $E(X) = 20$ et $V(X) = 3$. Minorer $P(|X - 20| < 4)$.
3. $E(X) = 12$ et $V(X) = 8$. Minorer $P(9 < X < 15)$.
4. $E(X) = 56$ et $V(X) = 16$. Majorer $P(|X - 56| \geq 10)$.
5. $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$ Montrer que $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq 0,25$.
6. $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$ Montrer que $P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$.
7. $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$ Montrer que $P(|X - \mu| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9}$.

Exercice 2

Un joueur lance 100 fois de suite une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui associe à une réalisation, le nombre de piles obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .
3. Le joueur annonce qu'il a plus de 3 chances sur 4 d'obtenir un nombre de piles dans l'intervalle $]40; 60[$. A-t-il raison ?

Désormais, Le joueur fait 100 lancers par jour pendant une semaine.

On note X_i la variable aléatoire qui associe le nombre de piles obtenus lors du i -ème jour.

On note M_7 la variable aléatoire qui associe la moyenne journalière sur les 7 jours.

4. Exprimer M_7 en fonction de X_1, X_2, \dots, X_7 .
5. Calculer l'espérance et la variance de M_7 .
6. Minorer la probabilité de l'évènement $\{M_7 \in [45; 55]\}$.

Le joueur fait 100 lancers par jour pendant n jours, avec n un entier naturel non nul.

On note M_n la variable aléatoire qui associe la moyenne journalière sur les n jours.

7. Exprimer M_n en fonction de X_1, X_2, \dots, X_n .
8. Calculer l'espérance de M_n .
9. Pour quelles valeur de n , l'écart-type de M_n est-il inférieur à 1 ?

Exercice 3

Une usine fabrique des pots de crème.

On prélève au hasard 10 pots à la sortie de l'usine. Les pots sont numérotés de 1 à 10.

On note X_i la variable aléatoire qui associe au pot numéroté i , son poids en grammes.

On considère que $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ est un échantillon de taille 10 d'une loi de d'espérance 175 et d'écart-type 5.

1. a. Calculer l'espérance de la variable aléatoire M_{10} définie par

$$M_{10} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10}$$

Calculer l'écart-type de M_{10}

- b. Déterminer une majoration de $P(|M_{10} - 175| \geq 7)$.
2. a. Calculer l'espérance de la variable aléatoire M_{20} définie par

$$M_{20} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{20}}{20}$$

Calculer l'écart-type de M_{20}

- b. Déterminer une majoration de $P(|M_{20} - 175| \geq 7)$.
3. Soit M_n la variable aléatoire définie par

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

- a. Calculer l'écart-type de M_n .
- b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'écart-type de M_n est inférieur à 0,05.

Exercice 4

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie 1

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

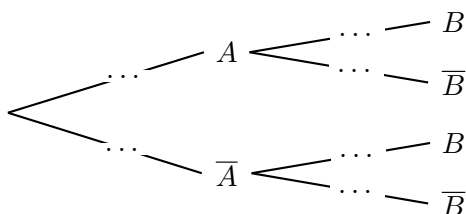
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note \bar{A} et \bar{B} les évènements contraires de A et de B .

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
 - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
 - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.
4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2 . En déduire l'espérance de X . Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
 5. On souhaite déterminer la variance de X .
 - a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
 - b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
 - c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie 2

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y .

Partie 3 - Partie à faire avec le chapitre suivant

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z .
2. Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour i entier variant de 1 à n , on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

On admet que les variables aléatoires Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont identiques à Z et indépendantes.

On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$$

- a. Quelle est l'espérance de M_n ?
- b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
- c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6,3 \leq M_n \leq 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

Exercice 5 Métropole Sujet 1 Juin 2014

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

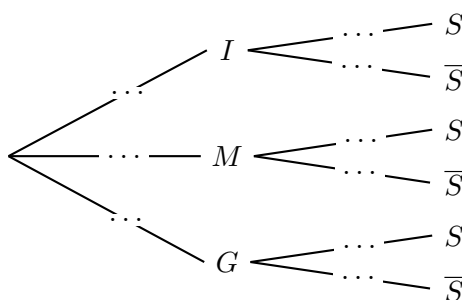
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les évènements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un évènement quelconque, on notera \bar{A} son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.



- 2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
- 3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.
- 4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ?
On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.
- 5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet. Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 . La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client. On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
 - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.
- a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .
 - b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Exercice 6 Métropole Jour 2 juin 2014

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

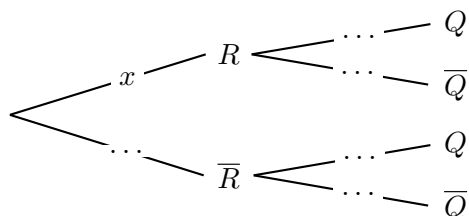
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et \bar{A} son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
 - a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- b. Montrer que $x = 0,9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires N_1, N_2, \dots, N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux.
On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .
6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.
- Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
 - Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
 - À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Exercice 7 Métropole Jour 2 Sujet dévoilé 2014

Les parties A et B sont indépendantes.

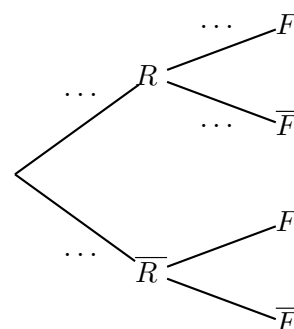
Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.
Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note \bar{E} son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

- Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
 - Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
 - Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
 - Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

- Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
- Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.

On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.

On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

- Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

- Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.

Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.

- À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Exercice 8 Métropole jour 1 septembre 2014

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On arrondira les résultats à 10^{-3} près.
 - a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
 - b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i , pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i -ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \dots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, \dots, M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ .

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S .
Montrer que : $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
 - a. Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1.$$

- b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.