Devoir n°3

Exercice 01 ***Un peu de dénombrement***

Répondre aux questions suivantes en indiquant si l'on dénombre une liste, un arrangement, ... et préciser l'ensemble sur lequel porte le dénombrement.

Exemple : *combien y a-t-il de façons de former une équipe de 4 élèves dans une classe de 30 élèves ?*
Réponse attendue : *une équipe est une combinaison de 4 éléments dans un ensemble à 30 éléments (l'ensemble des élèves de la classe). Il y a* $\binom{30}{4} = 27\,405$ *possibilités.*

1. Combien de façons y a-t-il de ranger par ordre de préférence les 6 saisons de la série *Kaamelott* ?
2. Combien de jus de fruits peut-on élaborer avec 5 fruits différents (sachant qu'un jus de fruit comporte au moins 1 fruit...) ?
3. Un QCM se compose 8 questions, chacune admettant 1 bonne réponse parmi les 4 proposées. Quelle est la probabilité de répondre tout juste à ce QCM en ne donnant que des réponses au hasard ?
4. On pioche 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains différentes ?
5. On trace n droites toutes sécantes, mais non concourantes. Combien forme-t-on de triangles de cette manière ?

Exercice 02 ***Démonstration de la formule de Pascal***

1. Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$: $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \times \binom{n}{p}$
2. En déduire la formule de Pascal : pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n-1$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 03 ***Binôme de Newton***

1. Dans cette question, on considère l'ensemble $E = \{a; b\}$, où a et b sont deux réels distincts, et un entier naturel n non nul. Étant donnée une n-liste d'éléments de E, on fait le produit des éléments de cette liste : on « fabrique » alors un nombre de la forme $a^k \times b^{n-k}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

   Par exemple, le produit des éléments de la liste $(a; a; a; b; b; \ldots; b)$ est le nombre $a^3 \times b^{n-3}$.

   (a) Combien de listes permettent de fabriquer le nombre a^n ? Préciser ces listes.
   (b) Combien de listes permettent de fabriquer le nombre $a \times b^{n-1}$? Donner la forme de ces listes.
   (c) Combien de listes permettent de fabriquer le nombre $a^p \times b^{n-p}$?
   (d) En développant (mentalement) le produit $(a+b) \times (a+b) \times \ldots \times (a+b)$, expliquer la formule dite du *binôme de Newton* :

   $$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

2. À l'aide de la formule du binôme, retrouver la formule vue en cours : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
3. À l'aide de la formule du binôme et du triangle de Pascal, développer $(x+1)^6$.