Devoir n°4

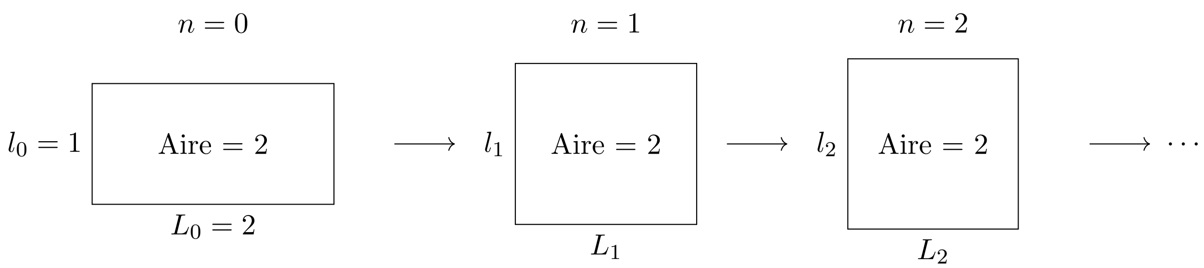
Problème. *Sur une tablette babylonienne (nommée YBC 7289) datée de plus de 3500 ans représentant un carré et des inscriptions cunéiformes (nombres babyloniens), on peut lire (après tanscription en base 10, les babyloniens calculaient en base 60) l'équivalent de :*

$$\sqrt{2} = 1,414222$$

valeur qui ne diffère que de 0,000008 de la vraie valeur : $\sqrt{2} = 1,414213562$.
Il faudra attendre la Renaissance pour en avoir une meilleure approximation ! Comment s'y sont-ils pris ?

Partie A : Méthode

Le nombre $\sqrt{2}$ est la longueur du côté d'un carré d'aire égale à 2. Les babyloniens ont certainement utilisé la **méthode de Héron**, en l'honneur de Héron d'Alexandrie, ingénieur et mathématicien grec du 1er siècle après J.C. Voici la méthode :



On part d'un rectangle de dimensions $L_0 = 2$ et $l_0 = 1$, d'aire égale à 2. On transforme ce rectangle en un second rectangle de dimensions $L_1 \times l_1$, où L_1 est la moyenne des dimensions du précédent, et l_1 est tel que l'aire du nouveau rectangle est encore égale à 2. Puis on réitère cette méthode, en se rapprochant de plus en plus d'un carré.

1. Calculer L_1, l_1, L_2 et l_2.
2. Exprimer L_{n+1} et l_{n+1} en fonction de L_n et l_n.

Partie B : Étude de (L_n)

3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{2}{L_n}\right)$$
4. On pose, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$. Déterminer les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sqrt{2} < L_{n+1} < L_n \leqslant 2$$

6. Que peut-on en déduire pour la suite (L_n) ?

Partie C : Limite de (L_n)

8. On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{L_n - \sqrt{2}}{L_n + \sqrt{2}}$. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.
9. Calculer v_0, et vérifier que $v_0 < \dfrac{1}{4}$.
10. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $0 < v_n < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2^n}$.

    En déduire la limite de (v_n).
11. Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \sqrt{2}$.

Partie D : Vitesse de convergence

12. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < L_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n - 1}$$

13. Donner la valeur exacte de L_3, puis une valeur approchée à 10 décimales. Combien de décimales justes obtient-on ?

    Justifier avec la formule précédente, et vérifier avec le calcul de $\sqrt{2}$ sur la calculatrice.
14. Démontrer que L_8 est une approximation de $\sqrt{2}$ avec plus de 150 décimales justes !

Partie E : Un algorithme pour les calculer tous

15. En adaptant la méthode précédente, proposer une suite convergeant vers $\sqrt{n}$, où n est un entier naturel quelconque.
16. Écrire une fonction Python `racine(n)` permettant de donner une valeur approchée de $\sqrt{n}$, où n est un entier naturel quelconque.