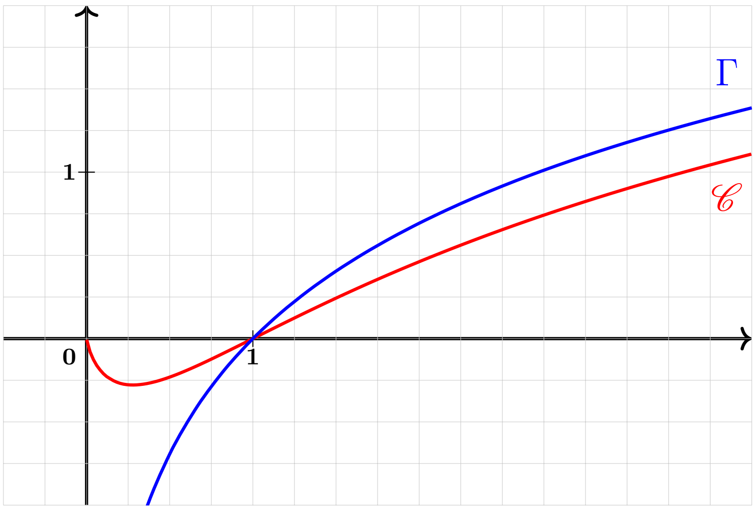
Devoir n°5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, et Γ la courbe d'équation $y = \ln(x)$, représentées ci-dessous :



Partie A : Conjectures graphiques

Conjecturer graphiquement (sans justifier) :

1. le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$
2. la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ

Partie B : Préliminaires

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln(x)$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Démontrer que $0,2 < \alpha < 0,3$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C : Étude de f

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Démontrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

   En déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
4. Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

Partie D : Position relatives
Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = f(x) - \ln(x)$.

1. Étudier le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer la limite de φ en $+\infty$.
3. Interpréter graphiquement les deux précédents résultats.

Partie E : βonus

Démontrer que φ admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$, atteint en un réel β tel que $f(\beta) = 1$.
Interpréter graphiquement ce minimum sur le graphique précédent.