TP : Équation de Pell-Fermat

Problème. *On s'intéresse à l'équation suivante, dite « équation de Pell-Fermat » :*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

où $d \in \mathbb{N}^*$ est donné, et les inconnues sont x et y, des ***entiers naturels non nuls****.*
C'est ***Diophante d'Alexandrie*** *qui, au IIIème siècle après J.C., est le premier à laisser une trace d'une équation de ce type dans son livre* Arithmetica. *Le mathématicien indien* ***Brahmagupta (598-670)*** *étudiera profondément cette équation, mais il faudra attendre le XVIIIème siècle (soit plus de 1100 ans plus tard) pour que* ***Lagrange (1736-1813)*** *montre que cette équation à une infinité de solutions, dans le cas où d n'est pas un carré.*

Quelques exemples pour bien commencer

1. Donner une solution de l'équation pour $d = 2$: $x^2 - 2y^2 = 1$
2. Donner une solution de l'équation pour $d = 3$: $x^2 - 3y^2 = 1$
3. Démontrer que l'équation n'a pas de solutions pour $d = 4$.

   ☞ *On montre de manière analogue que si d est un carré, alors l'équation n'a pas de solutions.*

4. Donner une solution pour $d = 5, 6, 7, 8$ et 10. On pourra s'aider d'un tableur et/ou de la calculatrice.
5. Déterminer une seconde solution pour $d = 2$.

Un premier algorithme

On se propose d'utiliser le programme Python ci-dessous pour déterminer des solutions $x^2 - 2y^2 = 1$ jusqu'à $y = 100$.

```python
from math import sqrt

for y in range(1,101):
    x = sqrt(1+2y**2)

    if x.is_integer():
        print(x,y)
```

6. Décrire le fonctionnement du programme.
7. Faire fonctionner cet algorithme. Qu'affiche-t-il ?
8. Peut-on afficher plus de solutions ? Si oui, comment ?
9. Déterminer 4 solutions pour $d = 2$.
10. Modifier l'algorithme pour déterminer :

    (a) Une solution pour $d = 37$.

    (b) 5 solutions pour $d = 3$ et $d = 8$.

11. Essayer de trouver une solution pour $d = 61$. [1]

1. La « plus petite » solution est $x = 1766319049$ et $y = 226153980$. Bonne chance...

Étude des solutions pour $d = 2$

On étudie ici le cas particulier $d = 2$.
Quoi de mieux que des suites pour trouver des solutions à ce problème ?

14. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers x_n et y_n tels que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$.
15. Vérifier que :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$
16. Montrer que pour tout entier naturel n, $(x_n ; y_n)$ est solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.
17. À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, donner 10 solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

☞ *On peut montrer, mais c'est bien plus difficile, que les couples $(x_n ; y_n)$ sont toutes les solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.*